東京都市大学共通教育部紀要　抜刷　2019 Vol.12

Lecture Notes on the Theory of Functions
– Conformal Mapping and Joukowski Transformation –

関数論初等講義 —— 等角写像とJoukowski変換 ——

古田 公司
野原　勉

Journal of Liberal Arts and Sciences at Tokyo City University Vol.12, 2019

関数論初等講義
―― 等角写像と Joukowski 変換 ――

自然科学系 数学教育部門　古田 公司
野原 勉

1　はじめに

工科系学部学科では, 大学初年時に微分積分学と線形代数学を修得して, その後 2 年次に微分方程式論, フーリエ解析学, ベクトル解析学, 関数論などが本学のように配当されるカリキュラムになっている大学が多い。専門学科の発展の礎になる意味でこれらのどの科目も重要なことに変わりはないが, 特に関数論は応用上極めて重要な事実を多く含んでおり, 歴史的に見ても関数論が工学に果たした役割は大きい。

本稿は, 特に, 関数論の応用上重要な等角写像と航空機翼設計におけるその役割を初等的に解説を試みるものである。

2　等角写像

$f(z)$ を z 平面上の領域 D で定義された $z(= x + \mathrm{i}y)$ の連続関数として

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

と書く。

定義 2.1　点 $c \in D$ において

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.1}$$

とし, 点 c を始点とする任意の 2 つのなめらかな曲線 γ_1, γ_2 に対して $a = f(c)$ において $f(\gamma_2)$ と $f(\gamma_1)$ とのなす角が c において γ_2 と γ_1 とのなす角に等しいとき,

写像 f は点 c において等角であるという。また, 写像 f が定義域 D の各点において等角であるとき f を等角写像という。

命題 2.1　z の関数 $f(z)$ が z 平面上の領域 D において正則でつねに $f'(z) \neq 0$ ならば $f : z \to w = f(z)$ は等角写像である。また, 逆に, $f : z \to w = f(z)$ が z 平面上の領域 D で定義された等角写像ならば D において $f(z)$ は z の正則関数でつねに $f'(z) \neq 0$ である。

命題 2.1 は, $f(z)$ が z について正則である場合には Cauchy-Riemann の関係式より

$$f(z) = u_x(x, y) + \mathrm{i}v_x(x, y) = v_y(x, y) - \mathrm{i}u_y(x, y)$$

が成り立つので

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} = |f'(z)|^2 \tag{2.2}$$

が言えることによる。

例 2.1　複素関数を

$$w = f(z) = z^2 \tag{2.3}$$

とする。対応する実関数は

$$\begin{cases} u = u(x, y) = x^2 - y^2, \\ v = v(x, y) = 2xy \end{cases} \tag{2.4}$$

である。

(1)　(2.4) において, $x = x_0$ として y を消去すると

$$v^2 = -4x_0^2(u - x_0^2) \tag{2.5}$$

を得る。これは図 2.1 に示すように, z 平面で $x = x_0$ の直線が f という写像により w 平面で u 軸上の x_0^2 を頂点とする放物線になる（この場合, $x = -x_0$ も同じ放物線に写像される）。

(2)　また, (2.4) において, $y = y_0$ として今度は x を消去すると

$$v^2 = 4y_0^2(u + y_0^2) \tag{2.6}$$

を得る。これは図 2.2 に示すように, z 平面で $y = y_0$ の直線が f という写像により w 平面で u 軸上の $-y_0^2$ を頂点とする放物線になる（この場合, $y = -y_0$ も同じ放物線に写像される）。

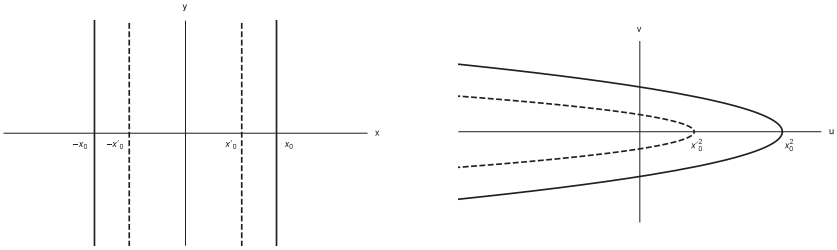

図 2.1　写像 1：複素関数 $f(z) = z^2$ は, z 平面（左図）の $x = \pm x_0$ を w 平面（右図）の放物線に写像する。左図の実線（破線）は右図の実線（破線）に写像される。

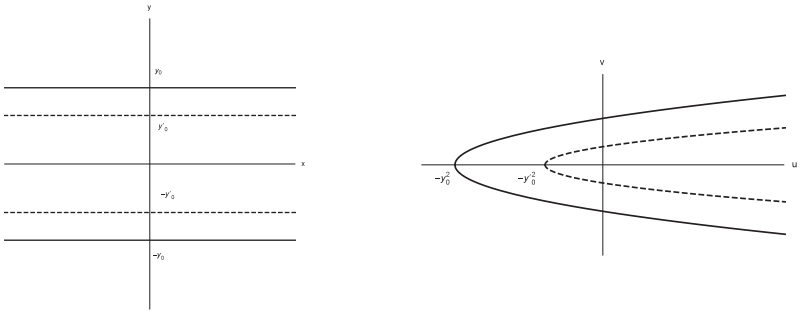

図 2.2　写像 2：複素関数 $f(z) = z^2$ は, z 平面（左図）の $y = \pm y_0$ を w 平面（右図）の放物線に写像する。左図の実線（破線）は右図の実線（破線）に写像される。

(2.3) は z 平面全領域で正則であるので, 命題 2.1 により $z = 0$ を除いて f は等角写像となる。したがって, (1), (2) において z 平面のそれぞれの直線は点 (x_0, y_0) で直交しているので, w 面へ写像されたそれぞれの放物線も直交することになる。ちなみに, 放物線 (2.5) における $u = u(x_0, y_0), v = v(x_0, y_0)$ での接線の傾きは

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right|_{\substack{u=u(x_0,y_0)\\ v=v(x_0,y_0)}} = -\frac{2x_0^2}{v(x_0, y_0)} \tag{2.7}$$

となり, また, (2.6) における同じ点での接線の傾きは

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right|_{\substack{u=u(x_0,y_0)\\ v=v(x_0,y_0)}} = \frac{2y_0^2}{v(x_0, y_0)} \tag{2.8}$$

となる。したがって, (2.7) と (2.8) よりそれらの接線の傾きの積は (2.4) より

$v_0^2 = 4x_0^2 y_0^2$ であるから

$$-\frac{2x_0^2}{v(x_0, y_0)}\frac{2y_0^2}{v(x_0, y_0)} = -\frac{4x_0^2 y_0^2}{v^2(x_0, y_0)} = -1$$

となり, 事実これらの放物線も直交していることが分かる。

3　非圧縮渦なしの流れ

以下の章において, 流体力学のポテンシャル流を取りあげて, 等角写像との関係を解説していく。

非圧縮渦なしの流れは, ポテンシャル流といわれる。ポテンシャル流は, 粘性も渦度も無視しており, 一見非常に特殊な状況下での流れのように見えるが, 航空機周りの流れも機体表面付近を除いてほとんどポテンシャル流と考えて差し支えない。実際には, 胴体や翼などの表面付近には粘性の効いた境界層が発生するが, これは非常に薄い層になる。したがって, 翼に作用する圧力はポテンシャル流から得られた圧力で代用可能であり, これにより機体の受ける揚力も計算できる。以下, 2 次元で話を進める。

x, y を位置座標として定常流体の速度ベクトルを

$$\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$$

としたとき, 渦なしの流れでは

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

であるので, これより速度ベクトルはスカラー関数 $\Phi(x, y)$ を用いて

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi \tag{3.2}$$

と表すことができる（$\mathrm{rot}(\nabla\Phi) = 0$ は恒等式である）。また, 非圧縮流体では連続の方程式は

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \tag{3.3}$$

であるので, (3.2) を代入すれば Laplace の方程式

$$\Delta\Phi = 0 \tag{3.4}$$

を得る。したがって, Laplace の方程式を解いて得られる Φ と完全流体の Euler の運動方程式から得られる圧力方程式により圧力を得ることができる。Φ を速度ポ

テンシャルという。(3.2) より速度成分は

$$u = \Phi_x, v = \Phi_y \tag{3.5}$$

となる。

同様に, ポテンシャル流では流線関数 $\Psi(x, y)$ が定義できて,

$$u = \Psi_y, v = -\Psi_x \tag{3.6}$$

を導くことができる。いま, 複素変数 $z = x + \mathrm{i}y$ を導入し, 複素関数

$$F(z) = \Phi(x, y) + \mathrm{i}\Psi(x, y) \tag{3.7}$$

を定義すると, (3.5) と (3.6) は

$$\Phi_x = \Psi_y, \Phi_y = -\Psi_x \tag{3.8}$$

であることをいっており, これは Cauchy-Riemann の方程式そのものになる。すなわち, ポテンシャル流で定義した 複素関数 (3.7) はある領域で正則関数であることをいっている。要約すると, 複素速度ポテンシャルにおいて Cauchy-Riemann の関係式が成立する（すなわち, 正則関数である）ことは, 流体力学ではポテンシャル流（非圧縮性渦なしの流体）であることと等価である, という美しい関係が得られる。

複素速度ポテンシャルが Cauchy – Riemann の方程式を満足 $\rightleftharpoons$ ポテンシャル流

さらに, 正則関数ならば, 命題 2.1 により $F'(z) = 0$ を除いて $F : z \to w = F(z)$ は等角写像になる。この事実を利用して, 航空機の翼設計に応用される。

4 Joukowski 変換と Joukowski 翼

4.1 円柱まわりの一様流

円柱まわりの流れは, 円柱を変換して任意の翼形状まわりの流れを得ることができ, 2 次元流の基礎となる。

速度 U の一様流中に半径 a の円柱[*1] を置いたとき, そのまわりの流れ場がどのようになるかをまず見ていくことにする。

[*1] 円柱の中心は座標原点に一致させる。

天下り的であるが[*2], その複素速度ポテンシャル W は

$$W = F(z) = U\Big(z + \frac{a^2}{z}\Big) \tag{4.1}$$

で表せる[*3]。(4.1) に $z = re^{i\theta}$ を代入し, 複素速度ポテンシャル W から速度ポテンシャル Φ と流線関数 Ψ は容易に

$$\Phi = U\Big(r + \frac{a^2}{r}\Big)\cos\theta, \quad \Psi = U\Big(r - \frac{a^2}{r}\Big)\sin\theta \tag{4.2}$$

と求まる。流線は $\Psi(r,\theta) = \alpha$ (定数) により与えられ, また, 等速度ポテンシャル線は $\Phi(r,\theta) = \beta$ (定数) により与えられる。W 面では Ψ と Φ は直交している直線群であるが, 等角写像により z 面に写像（$F^{-1}(W)$）された曲線群も直交することになる（図 4.1）。もちろん, 実際の流れは円柱の外側のみである。さて, (4.1) は一様流 Uz と 2 重湧出し[*4]（doublet）Ua^2/z の重ね合わせになっている。正則関数の重ね合わせもまた正則関数であるから, 特異点（$z = 0$）と臨界点（$z = \pm a$）を除いて等角写像が成り立っている[*5] 。

4.2 Joukowski 変換

(4.1) は, z 面から W 面への変換である。この写像に基づいてつぎの変換

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (a > 0) \tag{4.3}$$

[*2] ここでは天下り的に (4.1) を与えたが, 歴史的には, まず, 正則関数 (4.1) を与えてそれに適合する物理現象を見いだすべく研究された。

[*3] 流線関数 Ψ は Laplace 方程式を満足する。これを極座標系 $\Psi(r,\theta)$ で表して変数分離法で解き, 円柱表面の境界条件（$\Psi(a,\theta) = 0$）と無限遠方の境界条件（$\Psi \approx Uy = Ur\sin\theta$）を適用すれば (4.2) の Ψ を得ることができる。さらに, Cauchy-Riemann の関係式を使い Φ を求めることができるが, やや煩雑な計算である。

[*4] 複素速度ポテンシャル Ua^2/z より速度ポテンシャルは $\Phi = U\frac{a^2x}{x^2+y^2}$ となり, その等値線は $U\frac{a^2x}{x^2+y^2} = c$ $(= const.)$ となる。$c = 0$ の場合は, $x = 0$ すなわち, y 軸である。$c \neq 0$ の場合は, $\Big(x - \frac{Ua^2}{2c}\Big)^2 + y^2 = \Big(\frac{Ua^2}{2c}\Big)^2$ となり, これは中心が $\Big(\frac{Ua^2}{2c}, 0\Big)$, 半径が $\frac{Ua^2}{2|c|}$ の円を表している。c は正負の値がとれるので, 円は y 軸を対称にしてその両側にできることになる。

[*5] 臨界点 $z = \pm a$ にいたる速度ポテンシャルは簡単な計算により, $U\Big(r + \frac{a^2}{r}\Big)\cos\theta = \pm 2a$ で表せる。

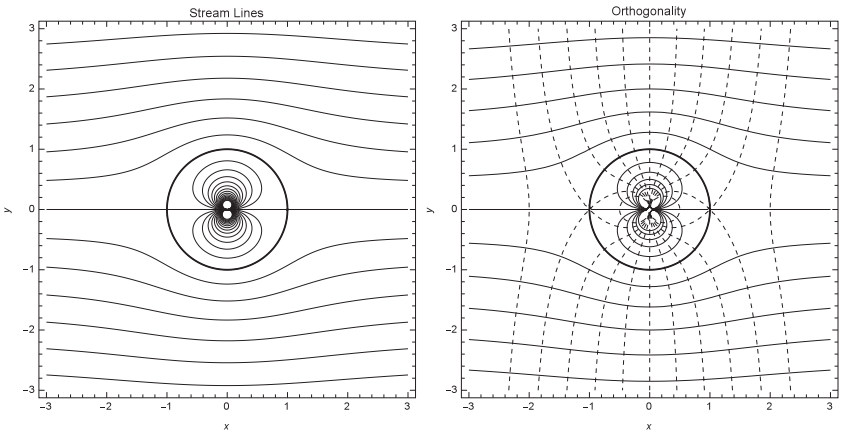

図 4.1　円柱まわりの流線 Ψ と速度ポテンシャル Φ：左図は流線。右図は流線（実線）と速度ポテンシャル（破線）の等値線の直交性を示す。x 軸方向に一様な流れの中に半径 1（$a = 1$）の円柱を設置したときの流れの状況（実際の流れは円柱の外側のみ）を示す。右図において, 臨界点（$x = \pm 1, y = 0$）では速度ポテンシャルの等値線と流線（単位円）とは直交していないことが分かる。

を Joukowski [*6]変換という。ζ を極形式 $\zeta = re^{i\theta}$ で表すと z の実部と虚部はそれぞれ

$$x = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \quad y = \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \tag{4.4}$$

となる。ζ 面上で原点中心の半径 r (= 定数) の円が z 面上では,

$$\frac{x^2}{\left(r + \dfrac{a^2}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right)^2} = 1 \tag{4.5}$$

となり, 長径 $r + \frac{a^2}{r}$, 短径 $r - \frac{a^2}{r}$, 焦点 $(\pm 2a, 0)$ の楕円であることを示している。

一方, θ (= 定数) とするとこれは ζ 面上で原点から出る半直線であり, 同様にして

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 4a^2 \tag{4.6}$$

[*6] Nikolai Jegorovich Joukowski（1847-1921）：ロシアの空力学の父であり, 第 1 次世界大戦中にはパイロットに効果的な爆弾の投下法をも教授した。

が得られ, これは z 面では焦点 $(\pm 2a, 0)$ の双曲線であることを示している。図 4.2 に Joukowski 変換の様子を示す。要するに, Joukowski 変換 (4.3) は ζ 面上の原点中心の円と原点を出る半直線を, z 面上の楕円と双曲線にそれぞれ写像する。ζ 面上の円 ($r =$ 定数) と半直線 ($\theta =$ 定数) は直交するので, z 面上の楕円と双曲線も正則関数の等角写像により直交することがわかる。

特に, (4.4) において $r = a$ とすると, $x = 2a\cos\theta,\ y = 0$ となり, x 軸上において原点を中心とする長さ $4a$ の線分に写像される。つぎの節 §4.3 ではこの事実に基づいて平板を過ぎる流れを扱う。

4.3 平板

Joukowski 変換の応用として, まず平板を過ぎる流れを扱う。z 面の x 軸に平行な速度 U の一様流中に x 軸に沿って幅 $4a$ の無限長の平板が設置されているとする。この状況では, 流れは平板により影響を受けないので, その複素速度ポテンシャルは

$$W = F(z) = Uz \tag{4.7}$$

で与えられる。上式に Joukowski 変換を施し, (4.3) を代入すると

$$W = U\left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right) \tag{4.8}$$

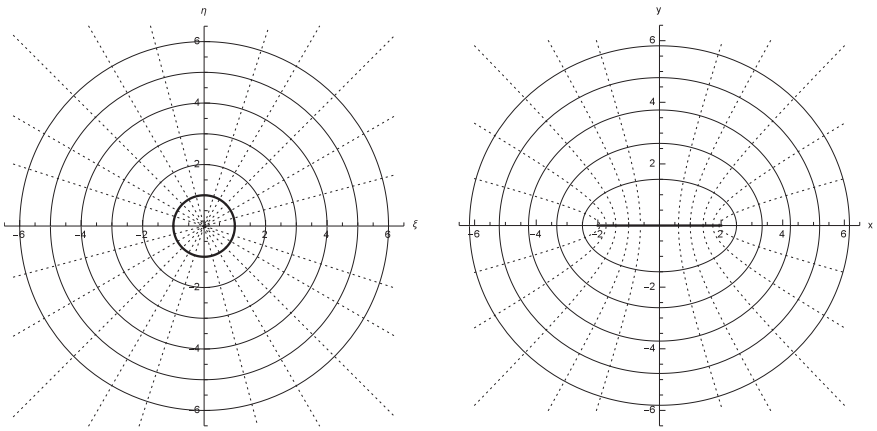

図 4.2　Joukowski 変換　左図は ζ 面（$\xi - \eta$ 平面）。右図は z 面（$x - y$ 平面）。左図の円（実線）と原点を通る直線（破線）は右図の楕円（実線）と双曲線（破線）に写像される。

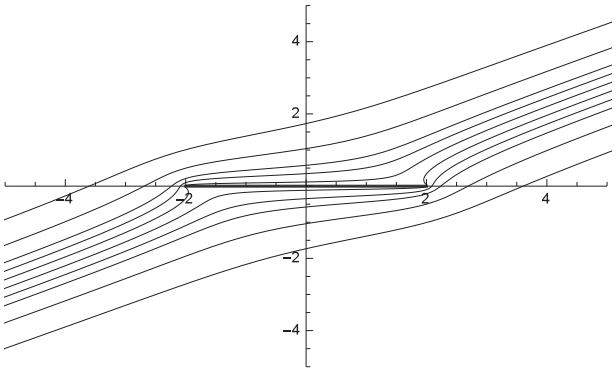

図 4.3　平板を過ぎる流れ：z 面（$x-y$ 座標）での流線の等値線を示す。図 4.5 の Joukowski 変換が本図である。図の等値線は上から Ψ =1.5,0.9,0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.3,-0.5,-0.9,-1.5 に相当する流線である。$U=1, a=1, \alpha=\pi/6$.

となり, これは (4.1) より ζ 面での ξ 軸[*7]に平行な速度 U の一様流中に置かれた半径 a の円柱まわりの流れを表している。

さて, z 面での一様流を x 軸に角 α [*8] だけ傾けた状況を考えよう。一様流中に何もなければその流れの複素速度ポテンシャルは (4.1) であるから, 平板が設置されていても $z\to\infty$ では

$$W \approx Ue^{-\mathrm{i}\alpha}z \tag{4.9}$$

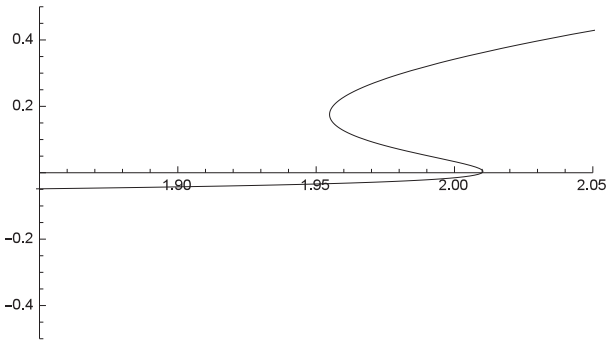

図 4.4　平板を過ぎる流れ：z 面（$x-y$ 座標）で流線の等値線 Ψ =-0.1 を拡大したもの。$z=2a(=2)$ において, 流れは角度 2π の角を回らなければならないので, Ψ が 0 に近いときには図のように大きく流れの逆方向に回り込むことになる。平板の後縁は $x=2, y=0$ の位置にあることに注意。

[*7] ζ 面の水平軸を ξ, 垂直軸を η とする。
[*8] α を迎え角という。

に近づかなければならない。また, ζ 面では $\zeta \to \infty$ のとき Joukowski 変換を考慮すると

$$W \approx Ue^{-\mathrm{i}\alpha}\zeta \tag{4.10}$$

に近づかなければならない。ところで円柱まわりの一様流が x 軸に角 α だけ傾いた複素速度ポテンシャルは (4.1) において z を $ze^{-\mathrm{i}\alpha}$ で置き換えたもの, すなわち

$$W = U\Big(ze^{-\mathrm{i}\alpha} + \frac{a^2e^{\mathrm{i}\alpha}}{z}\Big) \tag{4.11}$$

であるので, ζ 面では

$$W = U\Big(\zeta e^{-\mathrm{i}\alpha} + \frac{a^2e^{\mathrm{i}\alpha}}{\zeta}\Big) \tag{4.12}$$

となる。図 4.3 に $U = 1, a = 1, \alpha = \pi/6$ としたときの平板を過ぎる流れの流線（z 面（$x-y$ 座標）での等値線）を示す。図の等値線は上から Ψ =1.5,0.9,0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.3,-0.5,-0.9,-1.5 [*9] に相当する流線である。図 4.5 の円柱まわりの流れを Joukowski 変換したものが図 4.3 である。

ここで, 複素速度 w を求めると

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta}\Big/\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{U(e^{-\mathrm{i}\alpha} - a^2e^{\mathrm{i}\alpha}/\zeta^2)}{1 - a^2/\zeta^2} \tag{4.13}$$

となり, $\zeta = \pm a$, すなわち, 平板の両端（$z = \pm 2a$）において, $|w| = \infty$ となる。この現象が発生するのは完全流体で扱う限界を示している[*10]。図 4.3 で Ψ =-0.1 を拡大したものが図 4.4 であるが, 流れは $z = 2a(= 2)$ において, 角度 2π の角を回らなければならないので, Ψ が 0 に近いときには図のように大きく流れの逆方向に回り込むことになる。実際には, 粘性の影響で尖った後縁に接して流れるので平板の表面付近はポテンシャル流では限界がある。

4.4 Joukowski 翼

さて, ここでは航空機の翼の断面を Joukowski 変換により設計し, その翼まわりの流れを求めることを 2 つの例を通して解説する。

例 4.1 図 4.6 左図は ζ 面（$\xi - \eta$ 軸）と z 面（$x - y$ 軸）を同時に描いたものであ

[*9] Ψ は流線関数を示し, (4.11) の虚数部分であることは, §4.1 に説明した通り。

[*10] 粘性を考慮した実在流体の**境界層**で扱わねばならいないことを要請しているが, ポテンシャル流に Kutta-Joukowski の条件 [1, 3]（循環 Γ を調整して, 流線を後縁に接して流れるようにする条件のこと）を課してこれを解決している。

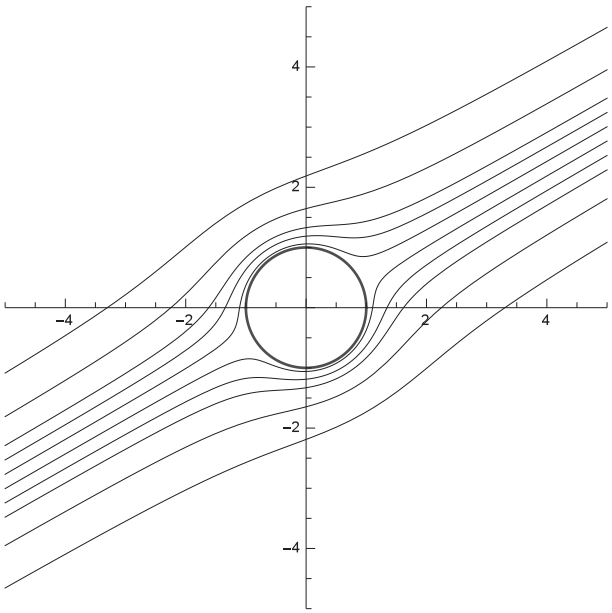

図 4.5　円柱まわりの流れ：ζ 面 (4.12) では円柱になり, 円柱まわりの流線の等値線を示す。等値線は上から Ψ =1.5,0.9,0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.3,-0.5,-0.9,-1.5 に相当する流線である。この 1 本 1 本の流線を Joukowski 変換したものが図 4.3 である。$U = 1, a = 1, \alpha = \pi/6$.

り, 同図中の円（ζ 面）はその中心が実軸上（$\zeta = -0.1 + 0\mathrm{i}$）にあり, 点 $\zeta = 1$ を通り半径は 1.1 である。この円を Joukowski 変換したものが同図の水滴を横にしたような図（z 面）になる。この写像のイメージを示したものが右図である。中心が $-0.1 + 0\mathrm{i}$ にある円は $\zeta = 1$ で半径 $a = 1$ の円 C_1 に接しており, さらに $\zeta = -1.2$ では半径 1.2 の円 C_2 に接していることになる。したがって, 等角写像により前者は z 面では $z = 2 = (2a)$ で実軸上の線分に接する尖点を形成することになり, また, 後者は z 面での対応する点は楕円に接することになる（図 4.2 参照)。このようにして水滴を横にしたような形状が出来上がることになり, 航空機の翼設計に応用される。この場合は x 軸には対称に写像される[*11] ので対称翼という。

さて, 円柱まわりの一様流を Joukowski 変換すれば対称翼まわりの流れが求まる。円柱まわりの一様流はすでに (4.2) で求まっており, これを Joukowski 変換して対称翼まわりの流れを計算したのが図 4.7 である。

[*11] Joukowski 変換 (4.3) において $y = \eta - \frac{a^2\eta}{\xi^2+\eta^2}$ であり, この例では $(\xi, \eta) = (\xi, -\eta)$ であるので $(x, y) = (x, -y)$ となり x 軸には対称に写像される。

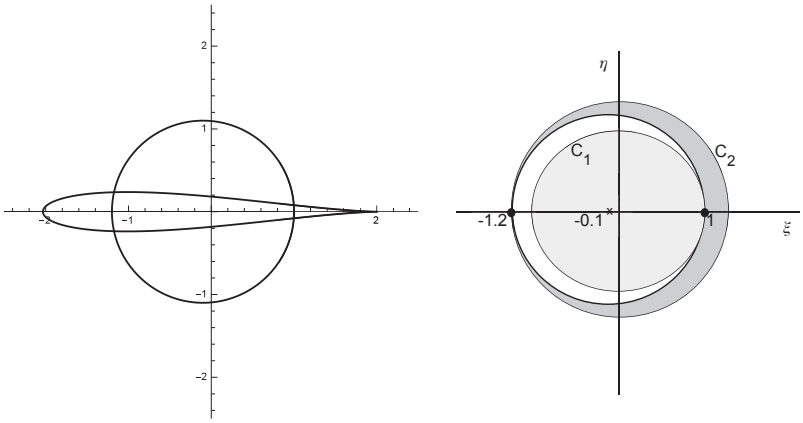

図 4.6　Joukowski 変換による対称翼　左図：円柱の中心を $\zeta = -0.1 + 0\mathrm{i}$ とし, 半径を 1.1 としたときの円を Joukowski 変換することによりできる対称翼。右図：中心が $-0.1 + 0\mathrm{i}$ の円（実線）は円 C_1 と C_2 に接している。

例 4.2　図 4.8 に ζ 面での円を Joukowski 変換した z 面での非対称翼を示す。この例では円の中心を $\zeta = -0.03 + 0.2\mathrm{i}$ とし, 半径を 1.04924 としている[*12]。この円を Joukowski 変換すると同図の弓なり状の形状になる。この場合は, 円は ξ 軸で対称

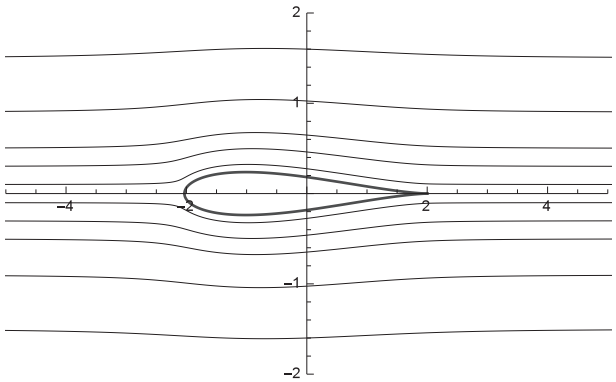

図 4.7　Joukowski 変換による対称翼まわりの流れ　図 4.6 左図の対称翼まわりの流線の等値線を示す。上から Ψ =1.5,0.9,0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.5,-0.9,-1.5.

[*12] このときにもこの円は $\zeta = 1$ を通ることに注意。

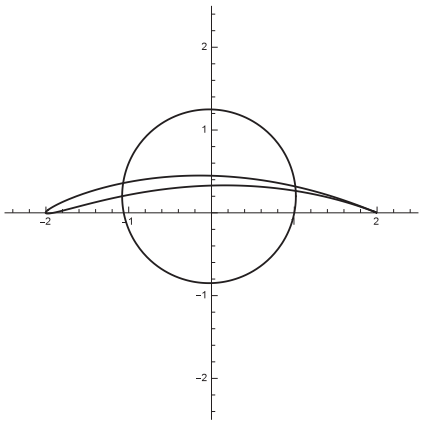

図 4.8　Joukowski 変換による非対称翼　円柱の中心を $\zeta = -0.03 + 0.2\mathrm{i}$ とし, 半径を 1.04924 としたときの円を Joukowski 変換することによりできる非対称翼。

ではないので, 写像された形状も x 軸に対称にはならない。このような形状の翼を非対称翼という。この例の非対称翼まわりの流れを計算したのが図 4.9 である。

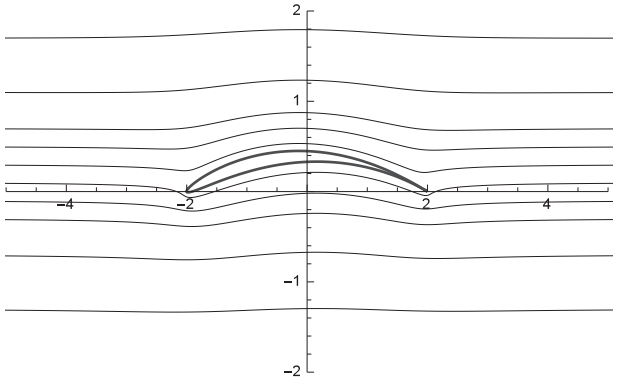

図 4.9　Joukowski 変換による非対称翼まわりの流れ　図 4.6 右図の非対称翼まわりの流線の等値線を示す。上から Ψ =1.5,0.9,0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.5,-0.9,-1.5.

5　おわりに

完全流体のポテンシャル流は関数論と最も整合性のよい応用の 1 例である。ポテンシャル流は Ma<0.3 [*13]であれば航空機翼まわりの空気の流れにも適用できるため, 初等的であってもおろそかにはできない分野である。巡航速度が亜音速[*14]の航空機でも安全に着陸する必要があり, したがって, ポテンシャル流の重要性はここにある。

熱力学においても複素熱ポテンシャルが定義できて, 非圧縮渦なし流れと同様にして等角写像にて解析できる。

関数論の応用に重点をおいた等角写像の初等講義例であるが, 読者の叱責を賜りたい。

参考文献

[1] Acheson, D.J., Elementary Fluid Dynamics, Oxford Univ. Press, 1990.
[2] 小平邦彦, 複素解析, 岩波書店, 1991.
[3] 巽友正, 流体力学, 培風館, 1982.
[4] 守屋富次郎, 空気力学序論, 培風館, 1959.

[*13] マッハ数が 0.3 以下。

[*14] Ma が概ね 0.3 以上 1 以下。ちなみに, Boing787 の巡航速度は Ma=0.85 である。