A Theory of Educational Contents for "Geometry of Rotation" in Junior High School Mathematics: Over the Composition of Two Rotations with Different Centers

中学校数学における「回転の幾何学」の教育内容論
―中心が異なる回転の合成をめぐって―

高橋 哲男

中学校数学における「回転の幾何学」の教育内容論

―中心が異なる回転の合成をめぐって―

人文・社会科学系　教職教育部門　高橋 哲男

1　課題の設定

中央教育審議会は 2016 年、「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」（以下「答申」という）を取りまとめた。文部科学省は答申を踏まえ、小学校学習指導要領及び中学校学習指導要領を 2017 年に、高等学校学習指導要領を 2018 年に改訂した。改訂の基調は「幼稚園教育要領、小・中学校学習指導要領等の改訂のポイント」「高等学校学習指導要領の改訂のポイント」にまとめられているが、筆者は特に、「「何ができるようになるか」を明確化」するという点に注目する。

答申ではこの点に関して次のように述べている。「教育課程において、各教科等において何を教えるかという内容は重要ではあるが、前述のとおり、これまで以上に、その内容を学ぶことを通じて「何ができるようになるか」を意識した指導が求められている」[1)]。

「何を教えるかという内容は重要ではあるが」との断りはあるものの、「何を教えるか」よりも「何ができるようになるか」をより重視する姿勢が明確に打ち出されている。答申では、改訂前の学習指導要領について「教育課程全体としてはなお、各教科等において「教員が何を教えるか」という観点を中心に組み立てられており、［中略］そのため、一つ一つの学びが何のためか、どのような力を育むものかは明確ではない」[2)] と指摘している。さらに、「指導の目的を「何を知っているか」にとどまらず「何ができるようになるか」にまで発展させることを妨げているのではないかとの指摘もあるところである」[3)] と述べている。

ところで、各教科等において「何を教えるか」が相対的に軽視されようとする傾向は、学習指導要領の今次改訂に始まったことではない。国立教育政策研究所は、日本における近年の教育政策の特徴の一つとして、「教育課程の基準においても、「自己教育力」(1983)、「新しい学力観」(1989)、「生きる力」(1998、2008) 等、世界的に見ても早い時期に資質・能力目標が導入され」[4] てきたことをあげている。また数学教育に限定して言えば、大田邦郎によれば、「そもそも 1947 年学習指導要領以来、「知識・理解」を通して「思考力」等を育成し「態度」を養うという 3 層構造の目的論、学力観のもとで数学教育が行われてきた」[5] という。

1951 年の学習指導要領に書かれている「数学科の指導は「数学を」教えるのではなく、数学で「生徒を」教育していくことである」[6] という思想が、算数・数学に限らず各教科の目的として戦後から一貫してきたように思われる。一貫してはきたが、生徒をどのような方向に教育するのかを示す目標や獲得させるべき学力は、国立教育政策研究所が示すように特に 1980 年代以降、毎度のように異なるキーワードに置き換えられてきた。確かに時代の変化に対応して、教育の目標を変化させる必要があったのかもしれない。しかし、教育の目標には、社会の変化に対応できる能力を育てること自身も含まれるだろう。「生きる力」について述べた 1998 年の教育課程審議会答申には、「激しい変化が予想される社会において、主体的、創造的に生きていくためには、［中略］自ら考え、判断し行動できる資質や能力の育成を重視していくことが特に重要なこととなってくる」[7] とある。時代の変化にも対応できるこうした資質や能力の育成が継続的に成功裏になされたならば、変化に対応したキーワードの変更も必要なかったであろう。対偶をとれば、キーワードの変更は、教科の内容で「生徒を」教育する、資質や能力の育成を図ることが一貫して成功してこなかった、その表れといえよう。

石井英真は、アクティブ・ラーニング（AL）や資質・能力ベースのカリキュラムへの危惧をこう述べている。「「何を教えるのか」という教育内容論レベルでの問い直しがなされないままに、「どうやれば AL を実践したことになるか」といった具合に、授業方法レベルで形式的に対応がなされることが危惧される」[8]。仮に「数学で「生徒を」教育していく」にしろ「何ができるようになるか」を重視するにしろ、やはり今こそ、石井の言うように教育

内容論レベルでの問い直しが必要ではないだろうか。

このように考えるとき、遠山啓の至言「数学教育は数学を教える教科である」[9] が思い出される。遠山は、「数学科の指導は「数学を」教えるのではなく、数学で「生徒を」教育していくことである」という考えに反対し、また戦後の生活単元学習を批判する文脈でそう言い切ったのである。遠山はさらにこう述べる。「教科としての数学を科学としての数学から切りはなしたとしたら、数学教育が数千年間に蓄積された数学の巨大な財産から学びとる道は閉されてしまい、数学教育はもっぱらわかり切った教材をどのように教えるかに関心をもつ末梢的な技術となってしまう」[10]。

教科としての数学を科学としての数学と結びつける遠山の命題を肯定的に受け止め、数学の巨大な財産のうちから「何を教えるか」を問い選択することが求められる。本稿では、幾何教育におけるそうした研究課題の一端として、ユークリッド平面における「回転の幾何学」の教材構成を目指した教育内容論を展開する。本稿は「教育内容を基軸とする教育方法学研究」[11] を志向しその一部となることを目指すものである。

2　変換による不変性を研究する幾何教育

2.1　F. クラインによる幾何学の定義

遠山の「数学教育は数学を教える教科である」に倣い、初等・中等教育の教科になっていない幾何学について「幾何教育は幾何学を教える」と言ってみる。幾何教育で「何を教えるか」を幾何学そのものに求めるこの立場は、「幾何学で「生徒を」教育していく」立場から例えば「幾何教育で生徒の論理的思考力を育てる」などと言っているよりは、幾何教育研究にずっと大きな実りをもたらすだろう。すでに見たように、教科の内容で「生徒を」教育する、生徒の資質や能力の育成を図る試みは、「教育内容論を欠き、固定された教育内容に関する教材の構成論や狭義の技術論に終始する」[12] からである。

とはいえ「幾何学を教える」としたところで、そこで教える幾何学とは何かを改めて問わなければならない。ここでは、幾何学を、主群の変換に対する不変性によって特性づけられる幾何学的性質を研究する学問としてとらえ

る、F. クラインの思想を採りたい。寺阪英孝・大西正男は、「《空間 R とその上に働く（R を R 自身の上に移す）変換群 G とが与えられたとき、R 内の図形の性質のうち G のどの変換によっても変わらないもの、すなわち各図形について変換群 G の不変量を研究するのが (R,G) 幾何学である》というのがクラインのエルランゲン・プログラムによる幾何学の定義であ」ると述べている [13]。幾何学のこうした定義は、幾何教育研究を進める上で非常に有効であると考える。

2.2　先行研究と本稿の位置づけ

F. クラインによる幾何学の定義に基づいて、変換による不変性を研究する幾何教育の授業プランを作成し小学校における授業実践を通してその有効性を検証する研究が、北海道大学教育学部教育方法学研究室数学教育研究グループによってなされてきた。主要な先行研究を列挙する。

[1] 須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 8 号、1990 年、69-121 頁）。

[2] 前田輪音「合同変換の授業プランとその授業記録―「鏡による図形の移動」の改訂―」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 12 号、1994 年、45-116 頁）。

[3] 前田輪音「授業書「ホモセティー」と授業記録―幾何教育における相似変換の指導の一環として―」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 12 号、1994 年、117-153 頁）。

先行研究 [1][2][3] はいずれも初等・中等教育における幾何教育の目標を「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」と設定し、2 次元空間（平面）に限定して教育内容・教材を構成した。[1][2] は併進・回転・鏡映からなる合同変換群を、[3] は相似変換群の指導の一環として、その部分群である併進・半回転（180°回転）・中心拡大からなるホモセティ変換群を扱っている（ホモセティ変換とは、任意の直線を自分自身に平行な直線に移す変換である）。

本稿ではこれらの先行研究に学びながら、[1][2] で扱われた合同変換群の部分群である併進・回転からなる正格合同変換群の教育内容の、とりわけ

中心が異なる回転の合成が回転になる場合に焦点を当てた整理を試みる[14]。[2] では回転になる場合の中心を、2 本の垂直二等分線を引くことにより求めている。本稿ではそうして求められる中心に関わって、[2] の発表当時に教材構成上意識されていたか明確ではない、鏡映や円周角の定理との関係を明らかにする。このことにより、正格合同変換群の授業プログラムである仮称「回転の幾何学」の教育内容・教材構成及び授業実践に向けた第一歩とすることを目的とする。

2.3　学習指導要領・教科書における「図形の移動」の内容

2017 年告示の中学校学習指導要領には、第 1 学年の図形分野の内容として「平行移動、対称移動及び回転移動について理解すること」と書かれている。併せて「図形の移動に着目し、二つの図形の関係について考察し表現すること」とある。

現在、中学校数学の教科書を発行する 7 社はいずれも平面図形の章に「図形の移動」という節を設け、併進（平行移動）、回転（回転移動）、鏡映（[線] 対称移動）を扱っている。7 社とも大なり小なりこれら変換の合成も取り上げているが、そこで獲得させたい教育目標は「平行移動、回転移動、対称移動の 3 つは、図形の移動の基本となるものです。これら 3 つの移動を使うと、図形をいろいろな位置に動かすことができます」[15] という点にとどまるように見える。

ただし、7 社の教科書のうちいくつかには注目できる記述もある。第一に日本文教出版は、平行な直線 ℓ ,m に関する鏡映の合成がどのような移動であるかを問い、併進と答えさせたいのであろう問題を出している[16]。この定理は先行研究 [1][2] でも教えられている。合成から見える 3 種類の変換の相互関係を知ることは重要である。

第二に、対応する直線の交角の大きさが 90° である正格合同な二つの三角形を示し、重ね合わせるにはどのように移動させればよいかを問うている 2 社、教育出版と東京書籍である[17]。この問題は意義深く、交角の大きさを 90° に限定しない形で先行研究 [2] でも扱われている。教育出版が問題文の袖部分に、惜しくもヒントのつもりか「移動の組み合わせ」と書いてしまっているように、併進と 90° 回転の合成による複数の解答を子どもから引き出

す目的で出題したと推測される。子どもからこの解答が出るのはよいとしても、しかし、[2] で教えられた「ある一つの回転で重なる」という認識の獲得までは、教育内容とされているのだろうか。一方、東京書籍には認識の発展を妨げかねない「移動の組み合わせ」のような余計なヒントは書かれていない。併進と回転の合成のみならずある一つの 90°回転で重なることの発見まで目指している可能性もあるが、不明である [18]。

「平行移動、回転移動、対称移動の 3 つは、図形の移動の基本となる」のは、これら 3 つを使って「図形をいろいろな位置に動かすことができ」るからではない。平面上のあらゆる合同変換がこれら 3 つの合成で実現できるという認識が形成されてこそ、基本であるとわかるのである。それは平面上の合同変換群の研究によって実現する。本稿では以下、合同変換群の部分群である正格合同変換群に対象を限定し、教材構成の鍵となる中心が異なる回転の合成に関する教育内容を検討する。

3　回転の合成をめぐる教育内容論

3.1　垂直二等分線による中心の作図

2 次元ユークリッド空間において、正格合同変換は併進または回転である [19]。回転の合成は正格合同変換であるからやはり併進または回転である。合成する回転の中心が一致する場合、その点を中心とする回転であることは明らかだろう。中心が異なる回転の合成の場合は、回転角の大きさの和が $360n°$（n は整数）のとき併進でありそうでないとき回転である [20]。

ここで記号、表記法を導入しよう。点 O を中心とする回転角の大きさが α である回転を記号 $O(\alpha)$ で表し、$O(\alpha)$ による点 A の像が点 A_1 であること（$O(\alpha)(A)=A_1$）を $A \xrightarrow{O(\alpha)} A_1$ で表す。

$O(\alpha)$ を先に、$O_1(\beta)$ を後に行う回転の合成 $O_1(\beta) \circ O(\alpha)$ は、$\alpha + \beta = 360n°$（n は整数）でないときある点 O_2 中心の回転 $O_2(\alpha+\beta)$ となる。O_2 は、合成による対応点を結ぶ線分の垂直二等分線を 2 本引いたときの交点である。図 1 に、$AB \xrightarrow{O(90°)} A_1B_1 \xrightarrow{O_1(60°)} A_2B_2$ という合成 $O_1(60°) \circ O(90°)$ の様子を示す。

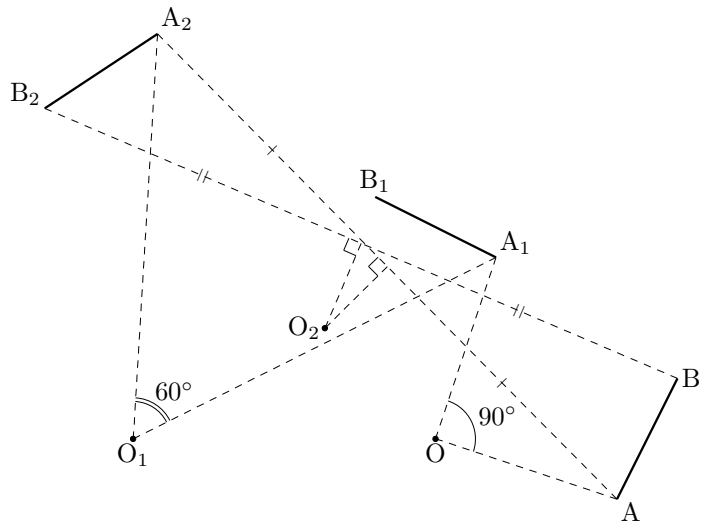

図 1　垂直二等分線による中心の作図

図 1 では、煩雑になるのを避けるため点 A の回転だけに注目して破線を引いたが、点 B も同様に回転している。O_2 は線分 AA_2,BB_2 それぞれの垂直二等分線の交点である。先行研究 [2] は、小学校 6 年生に対する授業で子どもたちがこの方法を用いて O_2 を求めたと報告している。分度器による測定で確かめたかどうかは不明だが、回転角の大きさについて「60+90 で 150 度」という子どもの発言があったとも書かれている。

3.2　行列、複素数を用いた中心の特定

筆者は「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」[21)]（以下「旧稿」という）で、回転の表現行列を用いて回転の合成が回転または併進になることを示している。しかしその際、回転の中心の代数的表現を得るに至っていなかった。旧稿の要点を説明しながら引き継ぎ、中心を求めてみよう。

点 O(a,b) とするとき、回転 O(α) は「ベクトル $(-a,-b)$ による併進」「原点中心の α 回転」「ベクトル (a,b) による併進」をこの順に行う合成である。その表現行列は

$$\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&a(1-\cos\alpha)+b\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha&-a\sin\alpha+b(1-\cos\alpha)\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

である。$O_1(a_1,b_1)$ とすると合成 $O_1(\beta)\circ O(\alpha)$ は、旧稿により $O(\alpha+\beta)$ とベクトル $\overrightarrow{v}=(u,v)$ による併進 $T(\overrightarrow{v})$ のこの順の合成 $T(\overrightarrow{v})\circ O(\alpha+\beta)$ であり、ただし

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1-a)(1-\cos\beta)+(b_1-b)\sin\beta\\-(a_1-a)\sin\beta+(b_1-b)(1-\cos\beta)\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる [22)]。また旧稿は、360° の整数倍でない θ について、回転と併進の合成 $T(\overrightarrow{v})\circ O(\theta)$ の表現行列が

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&p(1-\cos\theta)+q\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta&-p\sin\theta+q(1-\cos\theta)\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (3)$$

であり、ただし

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}\begin{pmatrix}(u+2a)(1-\cos\theta)+v\sin\theta\\(v+2b)(1-\cos\theta)+u\sin\theta\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (4)$$

であるとしている [23)]。(3) は、(1) と比べればわかるように点 (p,q) を中心とする θ 回転である。そこで (4) に (2) の u,v と $\theta=\alpha+\beta$ を代入すれば合成 $O_1(\beta)\circ O(\alpha)$ の回転の中心 $O_2(p,q)$ が求められる。結果は

$$\begin{aligned}p=&\frac{1}{2(1-\cos(\alpha+\beta))}\\&((a_1+a)(1-\cos(\alpha+\beta))+(a_1-a)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&+(b_1-b)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta))),\\q=&\frac{1}{2(1-\cos(\alpha+\beta))}\\&((b_1+b)(1-\cos(\alpha+\beta))+(b_1-b)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&-(a_1-a)(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)))\end{aligned}$$

となった。

ところで、正格合同変換の構成要素のうち併進は正規直交座標と相性がよ

いが、回転は極座標との方が相性がよい[24]。そこで、複素数表示を用いて回転の中心を求めている『変換群入門』[25]をレビューしておこう。

点O,O_1の複素数表示をそれぞれa,a_1とする。$s=\cos\alpha+i\sin\alpha, t=\cos\beta+i\sin\beta$とおくと$st=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$であり、合成$O_1(\beta)\circ O(\alpha)$によるzの像$(O_1(\beta)\circ O(\alpha))(z)$は、$st$=1でないとき（すなわち$\alpha+\beta=2n\pi$（$n$は整数）でないとき）

$$\begin{aligned}(O_1(\beta)\circ O(\alpha))(z) &= O_1(\beta)(O(\alpha)(z))\\ &= t((s(z-a)+a)-a_1)+a_1\\ &= st\left(z-\frac{a_1-ta_1+ta-sta}{1-st}\right)+\frac{a_1-ta_1+ta-sta}{1-st}\end{aligned}$$

となる。回転の中心O_2は$a_2=\dfrac{a_1-ta_1+ta-sta}{1-st}$で表される点である。

行列、複素数を用いて求めた中心の代数的表現いずれからも、残念ながら中学校における幾何教育の教育内容・教材構成に生かせる何かを見いだせそうにない。対象を高校生に広げたとしても、教育内容に取り入れるならば特殊な場合に限定する必要があるだろう。例えばαもβも直角とした90°回転の合成（半回転）の中心を見つける課題とすれば、これは「ガモフの宝探し問題」と同じ構造になる[26]。実際に行列を用いた計算において$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}\pi$、そして仮にO(1,0),$O_1(-1,0)$としてみると、中心の計算結果から$O_1(\beta)\circ O(\alpha)$の中心$O_2$の座標は$(p,q)$=(0,1)となる。複素数の場合も同様に$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}\pi$、点O,$O_1$の複素数表示をそれぞれ$a$=1,$a_1$=−1としてみると、$s$=$t$=$i$より回転の中心$O_2$の複素数表示は$a_2$=$i$と導かれる。

3.3　三角形の合同を用いた中心の説明

三角関数、行列、複素数といった高等学校以上の数学を用いて回転の中心を求めることはできたが、改めて中学校以下の数学のなかで、2本の垂直二等分線の交点を求める以外の方法による中心の特定を考えよう。これに関しては岩堀長慶が丁寧な説明を展開している[27]。

岩堀は、回転が恒等変換でないならばその不動点は回転の中心に限ると述べて、回転の合成が回転になる場合の中心を見つけることは、この合成による不動点を探すことに他ならないと説明している[28]。そしてその点は、合成$O_1(\beta)\circ O(\alpha)$の場合、図2に示す三角形の頂点$O_2$であるとする[29]。

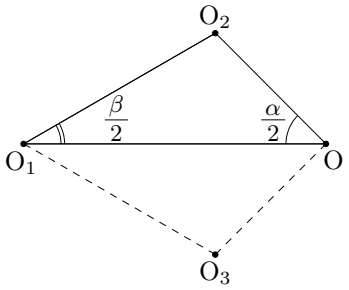

図 2　回転角の半角を用いた中心の特定

図 2 で、直線 OO_1 に関する点 O_2 の対称点を O_3 とすると、$O_2 \xrightarrow{O(\alpha)} O_3 \xrightarrow{O_1(\beta)} O_2$ であるから O_2 は確かに回転の合成 $O_1(\beta)\circ O(\alpha)$ の不動点であり、したがって回転の中心だと言うのである。

実際、任意の点 P をとり $P \xrightarrow{O(\alpha)} Q \xrightarrow{O_1(\beta)} R$ としたとき、点 O_2 を中心とするある回転によって点 P が点 R に移ることを確かめよう。

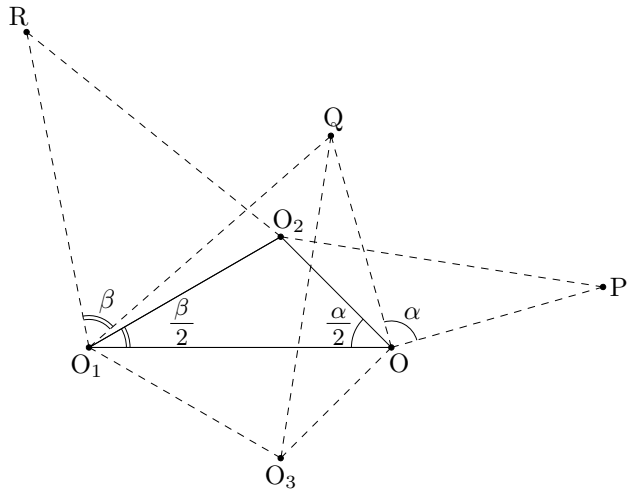

図 3　O_2 が中心であることの三角形の合同を用いた証明

図 3 で、△ OPO_2 ≡△ OQO_3 と△ O_1RO_2 ≡△ O_1QO_3 より、線分 O_3Q を介して O_2P=O_2R が成り立つ。三角形の合同条件を用いた証明の、適度な練習問題であろう。残る課題は回転角∠ PO_2R の大きさであるが、これら 2 組

の三角形の合同とたこ形 $OO_2O_1O_3$ の内角の和、及び

$$\angle PO_2R=360^\circ-(\angle OO_2O_1+\angle OO_2P+\angle O_1O_2R)$$

を用いて $\angle PO_2R=\alpha+\beta$ が示され、$P \xrightarrow{O_2(\alpha+\beta)} R$ となることがわかる。

3.4　鏡映の合成を用いた中心の説明

岩堀の言うとおりに二つの回転角 α，β の半角を用いて定めた図 2 の点 O_2 は、図 3 からわかるように確かに回転の合成の中心になっていた。ではどのようにしてこの点を発見できたのだろうか。実はそこには鏡映の合成が関わってくる。『変換群入門』も鏡映の合成について書いているが、ここではより古い文献である清宮俊雄『初等幾何学』[30] を見よう。

直線 g に関する鏡映を $U(g)$ で表す。$U(g_1)$ を先に、$U(g_2)$ を後に行う合成 $U(g_2)\circ U(g_1)$ は、直線 g_1,g_2 が交わるならば、その交点を中心とする回転である [31]。回転角の大きさは、g_1,g_2 の交角（有向角）の大きさを図 4 のように θ とするとき、2θである。

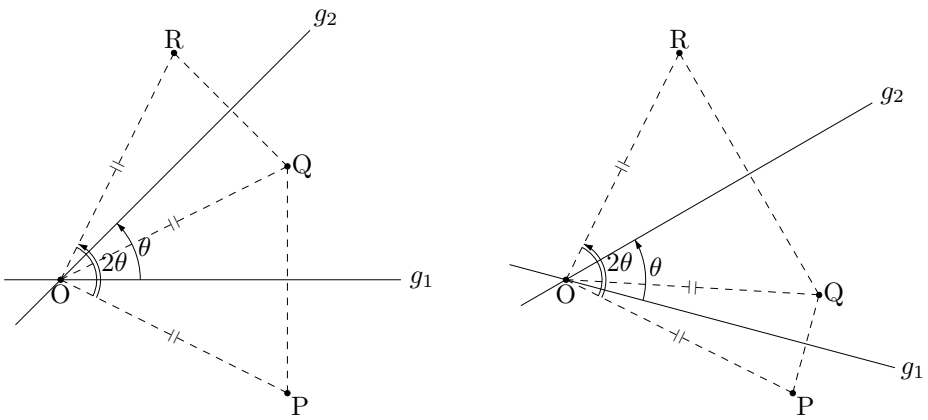

図 4　交わる 2 直線 g_1, g_2 に関する鏡映の合成 $U(g_2)\circ U(g_1)$

すると逆に、回転は鏡映の合成に分解できることがわかる。この際、図 4 のように点 O で交わる 2 直線 g_1,g_2 の交角の大きさが θ であれば、g_1,g_2 の位置によらず、合成の回転角の大きさは 2θになる（先行研究 [1] は、練習問題の不十分さを認めながらではあるが、小学校 6 年生にこの定理を教えた授業記録を報告している）。つまり回転の、鏡映の合成への「分解は一意的で

はないので、問題によっては、うまい軸のとり方が証明を大いに助ける場合もある」[32)]。

ここで岩堀による回転の中心 O_2 の定め方を示した図 2 を思い出そう。合成する二つの回転をそれぞれ $O(\alpha)=U(OO_1)\circ U(OO2)$,$O_1(\beta)=U(O_1O_2)\circ U(OO_1)$ と分解すれば

$$\begin{aligned} O_1(\beta)\circ O(\alpha) &= (U(O_1O_2)\circ U(OO_1))\circ (U(OO_1)\circ U(OO_2)) \\ &= U(O_1O_2)\circ (U(OO_1)\circ U(OO_1))\circ U(OO_2) \\ &= U(O_1O_2)\circ I\circ U(OO_2) \\ &= U(O_1O_2)\circ U(OO_2) \end{aligned}$$

となる（式変形途中の I は恒等変換である）。この合成の不動点は 2 直線 OO_2,O_1O_2 の交点 O_2 であり回転の中心である。図 2 は、鏡映の合成が一般に二つの鏡映軸の交角の大きさの 2 倍の回転になることを利用して、回転角 α，β の半角を交角とする 2 組の鏡映軸をうまく定めることにより中心を特定したのであった。

3.5　円周角の定理を用いた回転角の大きさの説明

以上で、回転の合成 $O_1(\beta)\circ O(\alpha)$ は、回転角 α，β の半角を用いて定まる図 2、図 3 の点 O_2 を中心とする $\alpha + \beta$ 回転であり、中心の定め方の背景には鏡映の合成があることを明らかにした。

ところで、合成の回転角の大きさがそれぞれの回転角の大きさの和になることは、3.3 で見たように三角形の合同を用いて示される。また PO_2 と QO_3 の交角の大きさが α であり QO_3 と RO_2 の交角の大きさが β であることから、PO_2 と RO_2 の交角の大きさが $\alpha + \beta$ であるという理解も可能だろう。しかし、三角形の合同を用いた式変形によるにしろ交角の助けを借りるにしろ、納得の面でどことなく心許なさが残る可能性もありそうである。そこで図 3 のどこかに $\angle PO_2X=\alpha$，$\angle XO_2R=\beta$ となる点 X をとり、「よって $\angle PO_2R=\angle PO_2X+\angle XO_2R=\alpha+\beta$」と結論することはできないだろうか。この課題に挑んでみよう。

図 3 において、点 O を中心とし OP=OQ を半径とする円と点 O_1 を中心とし $O_1Q=O_1R$ を半径とする円の交点のうち、Q でない方を K とする。これを図 5 に示す。

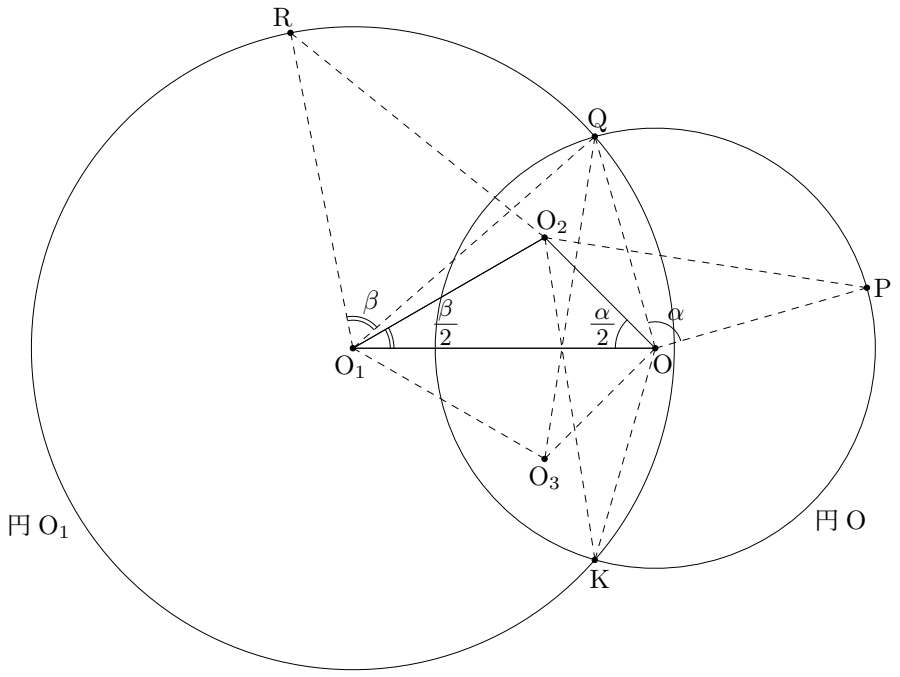

図 5　点 O_2 は△ PRK の外心

このとき、直線 OO_1 に関する対称性により QO_3=KO_2 である。ところで△ OPO_2 ≡△ OQO_3 から PO_2=QO_3 であったから結局 PO_2=KO_2 であり、PO_2=RO_2 と合わせると点 O_2 は△ PRK の外心であるとわかる。そこで改めて△ PRK の外接円を書いてみよう。余分な点や線を消した上で図 6 に示す。

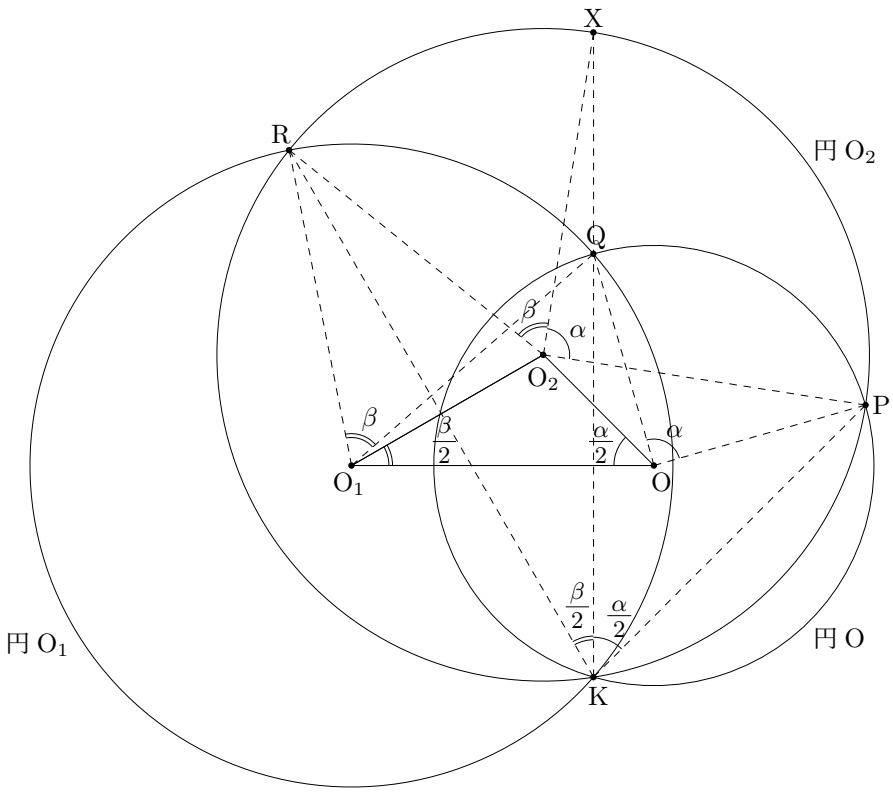

図 6　円周角の定理を用いた回転角の大きさの説明

ここで円 O_2 と直線 QK の交点のうち K でない方を X とする。円周角の定理より、円 O において∠ PKX= $\frac{\alpha}{2}$ でありしたがって円 O_2 において∠ PO_2X= α である。また同様に、円 O_1 において∠ XKR= $\frac{\beta}{2}$ でありしたがって円 O_2 において∠ XO_2R= β である。

それぞれ O,O_1 を中心とする回転の回転角 α，β を、それらの合成としての回転の中心である O_2 の周囲に集めることができた。よって、∠ PO_2R= ∠ PO_2X+ ∠ XO_2R= $\alpha + \beta$ が示された。

4　本稿の成果と今後の課題

本稿は、「教育内容を基軸とする教育方法学研究」の一環として、幾何教育を題材に、「回転の幾何学」の教材構成を目指した教育内容論を展開した。これは、F. クラインによる「変換による不変性を研究する」という幾何学の定義を出発点として幾何教育研究を進めてきた、北海道大学教育学部教育方法学研究室数学教育研究グループの先行研究を継承・発展させる目的をもつ。焦点を当てたのは正格合同変換群であり、特に、回転の合成が回転になる場合の中心をめぐって教育内容の整理を行った。

回転の合成としての回転の中心は、対応点を結ぶ線分の垂直二等分線を 2 本引いたときの交点として求められ、これを小学校 6 年生に教えた先行研究 [2] が存在する（3.1）。行列、複素数を用いた代数的な取り扱いをしても中心は特定されたが、高校生を対象にしたとしても、教育実践的には回転角を直角にするなど特別な場合に限定しないと授業で扱うのは難しいと考えられる（3.2）。合成の回転角の大きさがそれぞれの回転角の大きさの和になることは三角形の合同によって証明され、この際、回転の中心は回転角の半角を用いて特定された（3.3）。そこには鏡映が関連し、先行研究 [1][2] で教えられていた「平行でない 2 直線に関する鏡映の合成は回転である」という定理が背景に用いられていた（3.4）。

回転の合成に関わる教育内容を、いくつかの文献や筆者の旧稿を手がかりに以上のように整理した上で、合成の回転角の大きさがそれぞれの回転角の大きさの和になることについて、円周角の定理を用いた証明を加えた（3.5）。この証明は、3 つの回転の中心を中心とする 3 つの円を書くアイディアから生まれた。合成の回転の中心である点 O_2 を中心とする第三の円が、合成する二つの回転の中心である点 O,O_1 を中心とする第一、第二の円の交点（図 5、図 6 の点 K）を通ることが発見の決め手であった。ここでは第一、第二の円の中心を結ぶ直線 OO_1 に関する鏡映が役割を果たしていた。現・前中学校学習指導要領で第 1 学年の内容となっている「図形の移動」に関わる「回転の幾何学」の教育内容論を展開するなかで、同じく第 3 学年に位置する円周角の定理との関係の一端を明らかにした。

今後の課題は第一に、本稿で扱わなかった回転角の大きさの和が$360n°$（nは整数）である、回転の合成が併進になる特殊な場合の教育内容論を展開することである。その際、さらに特殊な場合である半回転二つの合成が併進になることを扱い、ホモセティ変換群指導として小学校6年生に教えた授業記録を報告している先行研究[3]の検討が必要になるだろう。合同変換としての半回転は中学校幾何教育の重要な位置を占める中点連結定理と結びつき、同時に、ホモセティ変換でもある半回転は相似変換群指導の入り口の一つでもある。

第二に、「回転の幾何学」の教材構成を進めることである。本稿は、2021年8月7日、8日に開催された数学教育協議会第68回全国研究大会（オンライン）の中学校図形分科会において行った「回転の幾何学」と題する発表を契機に、論文の構想を得て執筆に取りかかったものである。発表を勧めてくれたのは筆者も所属する北海道地区数学教育協議会・札幌中学校サークルの髙岡聰であった。彼をはじめとするサークルの仲間とともに教育内容論をさらに深め、授業実践可能な形へと教材構成する共同研究に取り組むことが課題である。

［付記］

本稿の執筆にあたり、札幌中学校サークルでの長年の活動を通して得られた仲間たちの報告、共に交わした議論からアイディアや刺激を受けたことも多い。今回まとめた回転の合成については、とりわけ髙岡聰、藤崎巽両氏との意見交流が重要であった。また、数学教育協議会第68回全国研究大会での発表に関わって、国士舘大学の正田良氏から文献の教示をいただいた。以上、特に記して感謝申し上げたい。

註

1) 中央教育審議会「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」2016年、15頁。
2) 同上、15頁。
3) 同上、20頁。
4) 国立教育政策研究所『資質や能力の包括的育成に向けた教育課程の基準の原理［改訂版］』2014年、15頁。
5) 大田邦郎「「数学を教える」のか「数学を通して教える」のか―「思考力」や「態度」は教育目的たりうるか―」（日本教育方法学会編『学習指導要領の改訂に関する教育方法学的検討―「資質・能力」と「教科の本質」をめぐって―』図書文化社、2017年、73-83頁）77頁。
6) 文部省『中学校・高等学校学習指導要領数学科編（試案）改訂版』1951年。
7) 教育課程審議会「幼稚園、小学校、中学校、高等学校、盲学校、聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について（答申）」1998年。
8) 石井英真「資質・能力ベースのカリキュラム改革と教科指導の課題―教科の本質を追求する授業のあり方―」（日本教育方法学会編『学習指導要領の改訂に関する教育方法学的検討―「資質・能力」と「教科の本質」をめぐって―』図書文化社、2017年、35-48頁）37頁。
9) 遠山啓「数学教育の基礎」（『岩波講座　現代教育学』第9巻、岩波書店、1960年、1-16頁）7頁。
10) 同上、8頁。
11) 須田勝彦「教育内容を基軸とする教育方法学研究―仲間たちとのあしあと―」（『北海道大学大学院教育学研究院紀要』第108号、2009年、1-14頁）。
12) 同上、2頁。
13) 寺阪英孝・大西正男「解説」（『ヒルベルト　幾何学の基礎　クライン　エルランゲン・プログラム』共立出版、1970年、307-407頁）330頁。
14) 「正格」とは、平面上の変換に限るが図形を裏返さないこととイメージするのがよいだろう。対して鏡映のように図形を裏返す変換を「変格」という。
15) 相馬一彦ほか『数学の世界1』大日本図書、2021年、195頁。
16) 重松敬一・小山正孝・飯田慎司ほか『中学数学1』日本文教出版、2021年、177頁。
17) 坂井裕・小谷元子ほか『中学数学1』教育出版、2021年、192頁。藤井斉亮・真島秀行ほか『新しい数学1』東京書籍、2021年、163頁。
18) 東京書籍は、前学習指導要領下の2014年発行の教科書では同じ問題に、キャラクターに「1回の移動だけで重ね合わせることができるかな？」と言わせているイラストを添えていた。筆者はイラストがなくなった2021年版の方を支持した上で、しかしこの問題を通して、併進と回転の合成は結局回転であるという定理の獲得を目指したいと考える。「1回の移動だけで重ね合わせることができるかな？」という問題意識は、キャラクターではなく子どもから出てきてもらいたいものである。
19) H.S.M. コクセター『幾何学入門』明治図書、1982年、42-50頁参照。
20) 岩堀長慶「二つの回転を“合成する”話」（岩堀長慶・伊原信一郎『数と図形の話』岩波書店、1978年、91-130頁）。
21) 高橋哲男「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第14号、1997年、7-47頁）。
22) 同上、19頁。
23) 同上、20-21頁。
24) 森毅『微積分の意味』日本評論社、1978年、122-124頁参照。
25) S. ドゥージン・B. チェボタレフスキー『変換群入門』シュプリンガー・フェアラーク東京、2000年、51-52頁参照。
26) 「ガモフの宝探し問題」とは、ジョージ・ガモフ『新版1,2,3…無限大』（白揚社、2004年）の49-53頁で出題、解説されている問題である。文部科学省『高等学校学習指導要領解説　数学編』（2009年）及び同『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理科編』（2018年）に「財宝探しの問題」の名称で、授業で扱う問題の例として取り上げられている。高橋哲男「「ガモフの宝探し問題」の教育内容論－中学校数学における「図形の移動」の教材構成に向けて－」（『東京都市大学教職課程研究年報』vol.10、2022年、1-10頁）参照。

27）前掲岩堀長慶「二つの回転を“合成する”話」。
28）同上、101-102 頁。
29）同上、113 頁。
30）清宮俊雄『初等幾何学』裳華房、1972 年、53-57 頁参照。
31）$U(g_2)\circ U(g_1)$ は g_1, g_2 が平行ならば併進であり、特に $g_1=g_2$ の場合は恒等変換である。
32）前掲 S. ドゥージン・B. チェボタレフスキー『変換群入門』49 頁。